

FUNCIONES Y DERIVADAS

a.- Representación gráfica de funciones.

b.- Límites de funciones:

c.- Asíntotas.

d.- Derivadas de funciones.

e.- Continuidad y Derivabilidad.

a.- Representación gráfica de funciones.

1.- Esboza las gráficas de las siguientes funciones:

- | | | | |
|--------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ | b) $f(x) = 2 - x^2$ | c) $f(x) = -4x + 2$ | d) $f(x) = 3x - 1$ |
| e) $f(x) = 3$ | f) $f(x) = -4$ | h) $f(x) = \ln x$ | i) $f(x) = \ln(2 - x)$ |
| j) $f(x) = e^x$ | k) $f(x) = e^{-x}$ | l) $f(x) = \text{sen } x$ | m) $f(x) = \text{cos } x$ |

2.- Esboza las gráficas de las siguientes funciones:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $f(x) = a$ siendo $a > 0$ | b) $f(x) = a$ siendo $a < 0$ |
| c) $f(x) = ax$ siendo $a > 0$ | d) $f(x) = ax$ siendo $a < 0$ |
| e) $f(x) = ax^2$ siendo $a > 0$ | f) $f(x) = ax^2$ siendo $a > 0$ |

3.- Representa sobre los mismos ejes coordenados las gráficas de las siguientes funciones y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas:

- | | | |
|----------------------|---|---------------------------|
| a) $f(x) = x^2$ | y | $g(x) = 3x$ |
| b) $f(x) = -x^2 + 1$ | y | $g(x) = x - 1$ |
| c) $f(x) = x^2$ | y | $g(x) = a$ siendo $a > 0$ |
| b) $f(x) = \ln x$ | y | $g(x) = 1$ |

b.- Límites de funciones:

4.- Calcula los siguientes límites:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 3x^2 + 4}$ | b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + x - 2}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 2x}$ | e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^3 + 2}$ g) |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5}{x^2 + 2x}$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 + 3}$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 - 1})$ | k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x})$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5}}{x}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ | ñ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 2x - 8}{3x^3 + 7x}$ |
| o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{4x^2 - 1})$ | p) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{2}}{x+1}$ | q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} - x \right)$ |

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 - 4}{x^2 + 1} - 2x \right)$

s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^x$

t) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 - 5}}$

5.- Calcula el valor de **a** para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x} = \frac{1}{2}$

6.- Calcula los valores de **k** para que se verifique que:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx^2 - 7x + 5}{7x^2 - 3} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{kx^2 - k}{x^2 + 3x + 2} = 4$

c.- Asíntotas.

7.- Sea $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$. Determina su dominio y calcula sus asíntotas.

8.- Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+8}$

c) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$

e) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

g) $f(x) = \frac{x^2+x+5}{x-2}$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

i) $f(x) = \frac{2x^2-3}{x}$

9.- Calcula las asíntotas de $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$

d.- Derivadas de funciones.

10.- Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

d) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

e) $f(x) = e^x \cos x + e^{-x} \sin x$

f) $f(x) = \sin(\sqrt{x^2+4})$

g) $f(x) = 3 \arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)$

h) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arctag} x}$

i) $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$

j) $f(x) = \frac{2\pi^2 \ln(x^3+x)}{\operatorname{tag}(\pi \cdot x)}$

k) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

l) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2+8}\right)$

e.- Continuidad y Derivabilidad.

11.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$.

Estudia si es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

12.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ determina el valor de k para que f sea continua en $x=1$.

13.- Sea $f(x) = (x - 2)|x|$

- Expresa la función f como una función a trozos.
- Estudia su continuidad.
- Esboza su gráfica.

14.- Sea $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + a}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ continua en $(-1, +\infty)$.

- Calcula el valor de a.
- ¿Es derivable en $x=0$?

15.- Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x^2 - |x|$

16.- Determina el valor de a sabiendo que $f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \cdot \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es derivable.

17.- Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{1-bx-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ función derivable. Determina los valores de las constantes a y b.